

Waldemar Cieřlok

**O matematyce muzycznej,
czyli o poszukiwaniu brzmień utraconych**

Szczecin, 2005

Wstęp

Gdyby ktoś dzisiaj wynalazł wehikuł czasu i nim przeniósłby do naszych czasów np. Jana Sebastiana Bacha, okazałoby się co następuje. Po pierwsze nasz mistrz byłby zaskoczony tym, że jego dzieła są jeszcze w ogóle wykonywane. Za jego czasów bowiem, muzykę pisało się na konkretne okazje i dla konkretnych wykonawców. Tak więc żywot barokowego dzieła muzycznego ograniczał się do jednego, czasem dwóch wykonań.¹ Po drugie Jan Sebastian Bach, nasz sposób grania i śpiewania określiłby, delikatnie mówiąc, jako nieco fałszywy.

Założmy teraz sytuację odwrotną. Naszym wehikułem czasu, teraz my, udamy się do Lipska pierwszej połowy osiemnastego wieku. Jest Wielki Piątek i jak luterkański zwyczaj każe, tego dnia weźmiemy udział w nabożeństwie, w czasie którego wykonana zostanie jedna z Pasji naszego mistrza. I jaki jest nasz odbiór tej muzyki? Znowu do głowy zawitałoby to subtelne aczkolwiek kłopotliwe stwierdzenie: „oni nieco fałszują!”.

Ale czy jest to możliwe? Skąd bierze się to nieodparte wrażenie? Czy Jan Sebastian Bach przygotowując wykonanie swych dzieł dopuściłby do takiej sytuacji?

Odpowiedź kryje się w systemie brzmieniowym, różnym od tego którego dzisiaj używamy. Otóż dziś posługujemy się tzw. systemem równomiernie temperowanym, zaś na przełomie XVII i XVIII w posługiwano się tzw. systemem średniotonowym. Dzisiejszy słuchacz, od małego przyzwyczajony do interwałów kształtowanych w systemie równomiernie temperowanym, te same interwały przełożone na system średniotonowy odebrałby jako fałszywe – niezgodne z tym do czego przyzwyczajone jest jego ucho. I na odwrót: słuch kształtowany przez system średniotonowy, interwały wplecione w każdy inny system dźwiękowy odebrałby jako fałszywe.

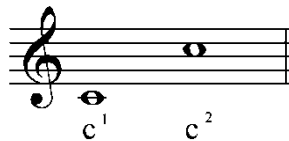
Tych systemów na przestrzeni wieków było wiele, tak więc by nieco uporządkować nasz ogląd przyjrzymy się im w sposób chronologiczny.

¹ Harnoncourt Nikolaus: Dialog muzyczny. Ruch Muzyczny, Warszawa 1999. s 100.

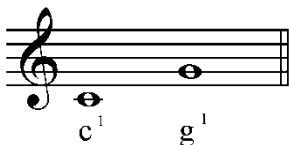
Pitagoras i system kwintowy

Pitagoras, filozof i matematyk, żyjący ok. roku 570 – 500 p. n. e, swymi koncepcjami zainicjował powstanie w Krotonie szkoły filozoficznej zwanej od jego imienia szkołą pitagorejską. Członkowie tej szkoły żyli we wspólnocie która swym kształtem mogłaby przypominać dzisiejszą wspólnotę klasztorną. Główną ideą, która nurtowała umysły pitagorejczyków była idea liczby tworzącej porządek świata i kosmosu. Uważali oni, iż rzeczy są odbiciami liczb, a ich zasada formalna ma postać matematyczną. Swe teorie pitagorejczycy stosowali w różnych dziedzinach: w matematyce (twierdzenie Pitagorasa), w etyce (cnoty identyfikowali z określonymi liczbami) i co dla nas najistotniejsze, także w muzyce (interwały wyrażone proporcjami liczbowymi).²

Odkrycie, przypisywane zresztą samemu Pitagorasowi, arytmetycznego stosunku pomiędzy długościami drgającej struny, odpowiadającymi różnym wysokościami dźwięków, utorowało drogę do opisanego systemu brzmieniowego nazwanego potem pitagorejskim. Uchwycono wtedy następującą prawidłowość: jeżeli drgającą strunę skrócimy w połowie, jednocześnie utrzymując jej stałe napięcie, to brzmieć będzie ona o oktawę wyżej niż gdyby drgała na całej swej długości.



I dalej: jeżeli skrócimy ją w jednej trzeciej, to będzie brzmiała o kwintę wyżej,



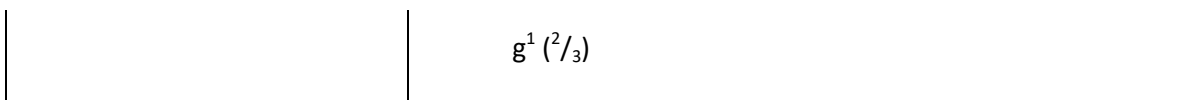
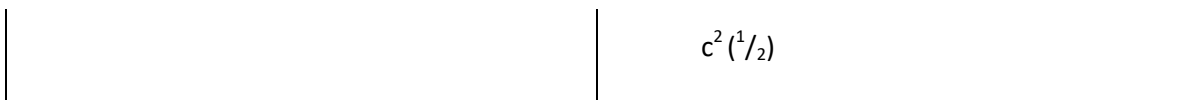
natomiast jeśli w jednej czwartej, to będzie brzmiała o kwartę wyżej.³



² Kunzmann Peter: Atlas filozofii. Prószyński i S-ka, Warszawa 2003. s 31.

³ Landels G. John; Muzyka starożytnej Grecji i Rzymu. Homini, Kraków 2005. s 149.

Wszystkie te przemyślenia były wspomagane narzędziem zwanym monochordem. Był to instrument muzyczny, zbudowany z pudła rezonansowego, pojedynczej struny (jak sama nazwa wskazuje) i umieszczonych pod nią ruchomych podstawków, które to powodowały żądane wydłużanie bądź skrócenie struny. Sposób przeprowadzania doświadczeń z pomocą monochordu wyglądał następująco:

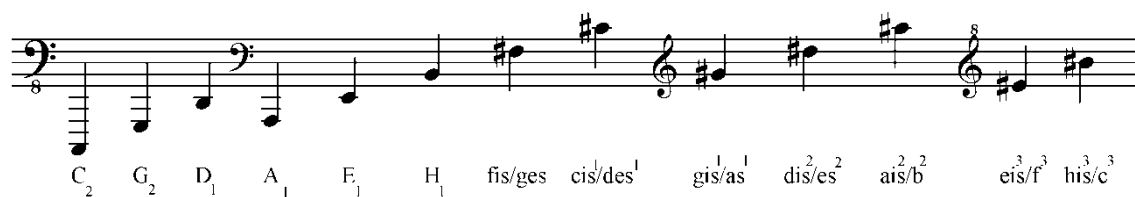


W taki oto sposób otrzymano proporcje dla trzech podstawowych interwałów:

- oktawy ($c^1 - c^2$) $\rightarrow 1 : 2$,
- kwinty ($c^1 - g^1$) $\rightarrow 2 : 3$,
- kwarty ($c^1 - f^1$) $\rightarrow 3 : 4$.

Interwały te określono mianem podstawowych, gdyż z działań przeprowadzonych na ich proporcjach można było uzyskać proporcje wszystkich innych interwałów. I tak:

- każdy interwał można zamienić na szereg kroków kwintowych w górę lub w dół i kroków oktaowych w stronę przeciwną by otrzymać drugi dźwięk składowy interwału w tej samej oktawie co pierwszy (zredukowanie oktaw),



- każdej kwincie w górę odpowiada współczynnik 3:2,
- każdej kwincie w dół odpowiada współczynnik 2:3,
- każdej oktawie w górę odpowiada współczynnik 2:1,
- każdej oktawie w dół odpowiada współczynnik 1:2.⁴

Chcąc więc obliczyć proporcje dla interwału np. seksty wielkiej ($c^1 - a^1$), należy wykonać następujące działania: od c do a mamy w sumie trzy kroki kwintowe w górę i by wrócić do oktawy razkreślnej należy wykonać jeden krok oktawowy w dół. Zakładając że poszczególne współczynniki należy pomnożyć przez siebie otrzymamy co następuje:

$$c^1 \quad g^1 \quad d^2 \quad a^2 \quad a^1$$

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{27}{8} \quad \frac{27}{16}$$

Podobną procedurą posłużymy się teraz by obliczyć proporcję dla interwału seksty małej ($c^1 - as^1$): tym razem musimy wykonać cztery kroki kwintowe w dół i trzy kroki oktawowe w górę, by wrócić do oktawy razkreślnej. Mnożąc poszczególne współczynniki przez siebie otrzymamy co następuje:

$$c^1 \quad f \quad B \quad Es \quad As_1 \quad As \quad as \quad as^1$$

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27} \quad \frac{16}{81} \quad \frac{32}{81} \quad \frac{64}{81} \quad \frac{128}{81}$$

Jak widać proporcje tych interwałów nie są już proste i zgodnie z zasadą wyrażoną przez pitagorejczyków, że im interwał ma bardziej skomplikowaną proporcję tym jest mniej konsonansowy, interwał nasz staje się właściwie dysonansem. To założenie „pokutuje” jeszcze w muzyce wielogłosowej średniowiecza w której za konsonanse uznawane były jedynie kwinty, kwarty i oktawy, zaś za dysonanse wszystkie inne interwały i z tego powodu albo nie używało się ich w ogóle albo pojawiały się one sporadycznie. Dla nas, ludzi zakorzenionych w upodobaniach brzmieniowych epoki romantyzmu, jest to wręcz niepojęte, gdyż głównie używamy słodkich brzmień tercji i seksty, te zaś

⁴ Drobner Mieczysław: Instrumentoznawstwo i akustyka. Państwowe Wydawnictwo Muzyczne, Kraków 1986. s 105.

interwały, preferowane przez średniowiecze i wcześniej przez pitagorejczyków brzmią dla nas ostro, sucho (tak postrzegamy akordy eliptyczne – pozbawione tercji), archaicznie.

Ciekawą sprawą jest, dla nas być może także niecodzienną, nie istnienie enharmonii w systemie pitagorejskim. Znaczy to tyle że poszczególne dźwięki, które w systemie dopuszczającym enharmonię (np. równomiernie temperowanym) różnią się zapisem oraz nazwą a brzmia identycznie, w systemie pitagorejskim takimi nie są. Różnią się one zapisem i wysokością brzmienia. Tak więc nie można postawić znaku równości pomiędzy następującymi grupami dźwięków:

- c ≠ his ≠ deses
- d ≠ cisis ≠ eses
- dis ≠ es ≠ fes
- e ≠ disis ≠ fes
- f ≠ eis ≠ geses
- fis ≠ eisis ≠ ges
- g ≠ fisis ≠ asas
- gis ≠ as
- a ≠ gisis ≠ heses
- b ≠ ais ≠ ceses
- h ≠ aisis ≠ ceses

Fakt ten powoduje że tzw. koło kwintowe⁵ w systemie pitagorejskim pozostaje niedomknięte. Szeregu dźwięków c – g – d – a – e – h – fis – cis – gis – dis – ais – eis – his nie można domknąć w miejscu c – his (c enharmonicznie, tzn. w brzmieniu nie jest równe his), ze względu na tzw. komat pitagorejski⁶ wyrażony następującym działaniem $(\frac{2}{3})^{12} : (\frac{1}{2})^7 = \frac{531441}{524288}$ ⁷ co w przybliżeniu daje 24 centy⁸ (ok. ¼ naszego całego tonu).⁹

⁵ dis/**es**-gis/**as**-dis/**es**-ais/**b-f-c-g-d-a-e-h-fis**/ges-**cis**/des-**gis**/**as**-**dis**/es ten ciąg dźwięków postępujący krokami kwintowymi można zapętlić przy pomocy dźwięków enharmonicznych. W ten sposób powstaje koło kwintowe.

⁶ Komat pitagorejski to różnica w wysokości pomiędzy dźwiękami równoważnymi enharmonicznie, np. his – c.

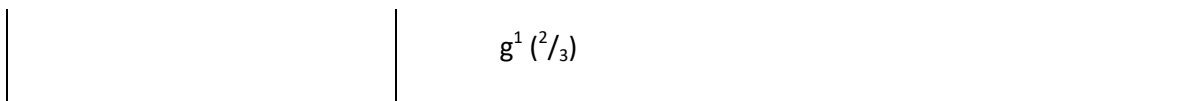
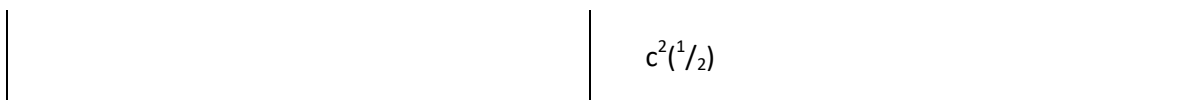
⁷ 12 kroków kwintowych : 7 kroków oktaowych.

⁸ Proporcje można przeliczyć na system centowy za pomocą algorytmu: $\log_{10}(\text{większa liczba} : \text{mniejsza liczba}) \cdot 3987 = \text{wynik}$. System centów logarytmicznych został zaprojektowany z myślą o interwałach temperowanych współczesnych instrumentów klawiszowych. Jest szeroko stosowany do prowadzenia różnych badań akustycznych. W dalszej części pracy proporcje będą zastępowane wartościami systemu centowego. Por. Landels .G. J. op. cit. s 299.

Didymos i system kwintowo-tercjowy

System pitagorejski sprawdzał się dobrze na polu muzyki jednogłosowej. Problem pojawił się wraz z nadejściem średniowiecznej Ars Nova, gdy w muzyce wielogłosowej zaczęto używać współbrzmienia tercji i seksty. Tercja powstawała przez sumowanie czterech pitagorejskich kwint: c – g – d – a – e i wyrażona proporcją 64 : 81, z powodu występowania komatu pitagorejskiego brzmiała dysonansowo i wymagała rozwiązania. O jej dysonansowości świadczyła już sama proporcja składająca się z liczb dwucyfrowych.

Rozwiązanie tego problemu pojawiło się jeszcze w dobie antyku. Niejaki Didymos z Aleksandrii (ok. 30 r. p. n. e.) dokonując obliczeń proporcji interwałów poszedł o jeden krok dalej niż Pitagoras. Otóż oprócz podziału struny monochordu na 2, 3 i 4 części dokonał podziału na 5 części, dzięki czemu uzyskał prostą proporcję konstytuującą tercje wielką i małą.



Tercja didymejska – naturalna (różni się do pitagorejskiej o tzw. komat syntoniczny tj. ok. 22 centów = 1/10 całego tonu = 1/5 półtonu) brzmiała dobrze co kwalifikowało ją do grupy konsonansów. Na ten fakt wskazywała także proporcja tego interwału jaką otrzymał Didymos: 4 : 5 dla tercji wielkiej i 5 : 6 dla tercji małej.

⁹ Drobner. op. cit. s 104.

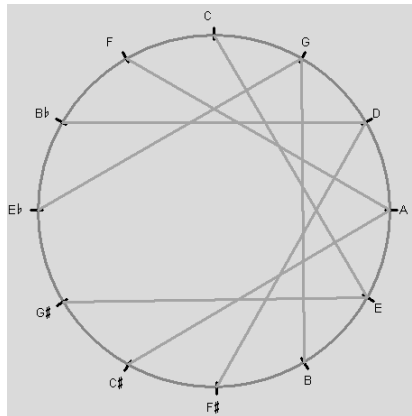
Interwał ten stopniowo stał się centrum harmonii, określając tryb i tonację. Po przesuwaniu się krokami tercjowymi wraz z krokami kwintowymi uzyskano ok. 200 kombinacji w obrębie oktawy, co jednak dalej utrudniało stosowanie dźwięków enharmonicznie równoważnych.

System naturalny okazał się być najlepszym na polu muzyki diatonicznej.

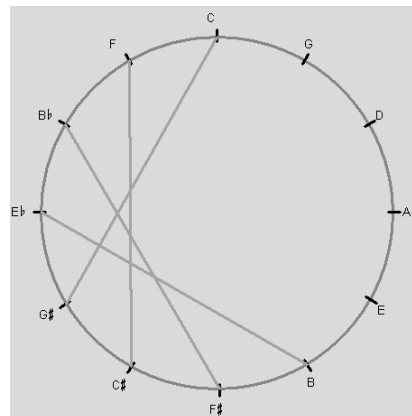
System średniotonowy

Aby zniwelować skutki komatu od XV w. zaczęto poszukiwania kompromisu brzmieniowego poprzez stosowanie tzw. temperacji. Zaczęły więc powstawać systemy brzmieniowe (tzw. stroje), w których rozmiar interwałów naturalnych zwiększono lub zmniejszono. W różnych koncepcjach starano się zachować jednak możliwie dużo interwałów naturalnych. Te zaś które w skutek temperacji zaczynały brzmieć niedobrze nazywano interwałami wilczymi.

W stroju naturalnym cały ton występował w dwóch wielkościach wyrażonych proporcjami 8 : 9 (większy) i 9 : 10 (mniejszy). 8 : 9 : 10 – 9 leży dokładnie pomiędzy 8 a 10 i tak też uśredniono różnicę pomiędzy tymi dwoma tonami by otrzymać jeden cały ton o jednej wielkości (stąd nazwa system średniotonowy). Mniejszy ton zwiększono o $\frac{1}{4}$ komatu, natomiast większy o tyle samo pomniejszono. Odbiło się to kosztem temperacji kwinty, która teraz otrzymała rozmiar 696 centów (w systemie pitagorejskim miała ona rozmiar 700 centów). Z systemu naturalnego udało się zachować następujące tercje wielkie – naturalne (386 centów): es-g, b-d, f-a, c-e, g-h, d-fis, a-cis, e-gis.



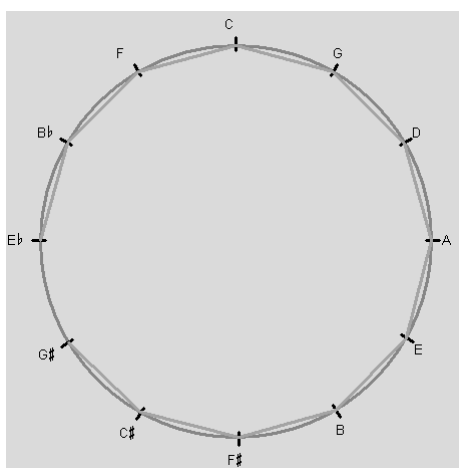
Tercje wielkie – naturalne (386 centów)



tercje wielkie – fictae (wilcze) po 427 centów każda

Pozostałe tercje wielkie – fictae (wilcze) po 427 centów każda – były większe od naturalnych o 42 centy i używano ich właściwie jako kwarty zmniejszone, a więc jako dysonansów wymagających rozwiązania. Były to: h-es (dis), fis-b (ais), cis-f (eis), gis-c (his).

Konstruowanie takiego systemu brzmieniowego z reguły zaczynano od dźwięku es. Wszystkie kwinty pomniejszono o $\frac{1}{4}$ komy: es – b – f – c – g – d – a – e – h – fis – cis – gis [– (dis) → dis nie jest równe es]. Kwinty temperowane miały 697 centów (w stosunku do kwint naturalnych mniejsze o 5 Ct tj. o $\frac{1}{4}$ komy) i były to: es-b (1), b-f (2), f-c (3), c-g (4), g-d (5), d-a (6), a-e (7), e-h (8), h-fis (9), fis-cis (10), cis-gis (11).



Niedomknięte koło kwintowe.

Po złożeniu 11 kwint, ostatnia kwinta gis – dis (dis) okazywała się o wiele za duża (została więc nazwana wilczą) i przez to w zasadzie była bezużyteczna. W stroju średniotonowym nadal nie istniała możliwość zamiany enharmonicznej (np. dis = es). Natomiast chromatyka stawiała się rzeczywiście chromatyką – jak chociażby dźwięk fis był odcieniem dźwięku f. Półton ten (chromatyczny) sprawia wrażenie zmiany zabarwienia, gdy np. fis – g jest już solidnym interwałem.¹⁰

Używanie w XVII w. stroju średniotonowego spowodowało, iż poszczególne tonacje brzmiały w tylko sobie charakterystyczny sposób. Powód ich różnego brzmienia leżał w różnym rozmiarze tych samych interwałów w różnych tonacjach, a co za tym idzie pewne tonacje brzmiały lepiej a inne gorzej (fałszywie). Dziś tonację np. E – dur i e – moll postrzegamy jedynie jako „wesołą” i „smutną” (zresztą jak każdą inną durową i mollową). W czasach kiedy obowiązywał strój średniotonowy tonację E –dur opisano jako tonację pełną rozpacz i bezbrzeżnego smutku, zaś e – moll jako tonację pełną smutku, jednak takiego, po którym nadchodzi pocieszenie.

Z tabeli przedstawionej poniżej wynika, że tonacje powyżej 5 krzyżyków i 3 bemoli nie nadawały się do użycia, gdyż zawierają dźwięki tworzące interwały wilcze. Potwierdzają to też uwagi

¹⁰ Harnoncourt Nicolaus: Muzyka mową dźwięków. Ruch Muzyczny, Warszawa 1999. s 199.

poczynione przez Matthesona (siedemnastowiecznego teoretyka muzyki), gdyż brak w nich opisów dotyczących tonacji powyżej ilości wymienionych znaków chromatycznych.

Tonacje C – dur, D – dur, A – dur, F – dur i B – dur skojarzono z afektami opisującymi radość, gdyż akordy zbudowane na dźwiękach poszczególnych tonacji z tej grupy zawierają interwały naturalne – dobrze brzmiące. Akordy zbudowane na dźwiękach tonacji E –dur, H – dur, Fis – dur, Es – dur, As – dur brzmią gorzej (fałszywie) gdyż zawierają interwały wilcze, a co za tym idzie tonacje z tej grupy skojarzono z afektami dotyczącymi smutku. Pozostałe tonacje, a właściwie akordy zbudowane na ich materiale dźwiękowym, zawierają tak dużą ilość interwałów wilczych, że nie używano ich prawie w ogóle.

Walory brzmieniowe akordów zbudowanych na I, II, III, IV, V i VI stopniu w poszczególnych tonacjach durowych, w stroju średniotonowym

tonacja	#/b	I st.	II st.	III st.	IV st.	V st.	VI st.	uwagi Matthesona dotyczące poszczególnych tonacji durowych
Fis	6 #	cis ais fis	dis h gis	eis cis ais	fis dis h	gis eis cis	ais fis dis	(brak)
H	5 #	fis dis h	gis e cis	ais fis dis	h gis e	cis ais fis	dis h gis	przykra
E	4 #	h gis e	cis a fis	dis h gis	e cis a	fis dis h	gis e cis	pełna rozpaczy
A	3 #	e cis a	fis d h	gis e cis	a fis d	h gis e	cis a fis	wzruszająca i przejmująca, wyraża smutek i skargę
D	2 #	a fis d	h g e	cis a fis	d h g	e cis a	fis d h	ostra i uparta, najlepsza do spraw radosnych
G	1 #	d h g	e c a	fis d h	g e c	a fis d	h g e	wyraża uczucia poważne i radosne
C	0	g e c	a f d	h g e	c a f	d h g	e c a	śmiała, wyraża niepohamowaną radość
F	1 b	c a f	d b g	e c a	f d b	g e c	a f d	wyraża najpiękniejsze odczucia
B	2 b	f d b	g es c	a f d	b g es	c a f	d b g	bardzo wyborna, neutralna
Es	3 b	b g es	c as f	d b g	es c as	f d b	g es c	zawiera wiele patosu
As	4 b	es c as	f des b	g es c	as f des	b g es	c as f	(brak)

Kolorem czerwonym oznaczono tercje wielkie – naturalne (386 centów), niebieskim - tercje wielkie – fictae (wilcze) po 427 centów każda oraz wilcze kwinty.

System równomiernie temperowany

Strój średniotonowy dominujący w XVII szwankował jednak z powodu nie możliwości prowadzenia swobodnych modulacji i transpozycji co zakładał dojrzały system tonalny dur – moll. Zaczęto wtedy poszukiwać tzw. Wohltemperierte Stimmungen – miały one umożliwić równouprawnienie wszystkich tonacji.

Już w 1533 r. Lanfranco zalecił by wszystkie kwinty uczynić nieco mniejszymi, a tercje zwiększyć na tyle na ile słuch pozwoli.

Początek wieku XVIII przynosi ze sobą okrzepnięcie systemu dur-moll, który zastępuje system skal kościelnych, swym rodowodem sięgających jeszcze czasów antycznych. Za sprawą równomiernej temperacji zakładającej podział oktawy na 12 matematycznie równych półtonów mogła rozwinąć się w pełni enharmonia (rozumiana w sposób nowożytny). Równouprawnienie tonacji (teraz wszystkie brzmiały identycznie i równie dobrze) umożliwiło niczym skrępowane użycie modulacji i rozwój takich form muzycznych jak np. sonata, koncert klasyczny czy symfonia, dla których ważna była możliwość nieskrępowanego modulowania – przechodzenia z tonacji do tonacji. W systemie równomiernie temperowanym zrezygnowano z naturalnych kwint co było konieczne by zlikwidować skutki występowania komatu.

Temperacja równomierna zniweczyła jednak wyrazowe znaczenia tonacji, spowodowała monotonię brzmienia i zanik właściwie rozumianej chromatyki.

Program SCALA

Czy dzisiaj słuchając muzyki dawnej jesteśmy w stanie wyobrazić sobie jak ona mogła brzmieć w czasach kiedy powstawała? Czy jest to w ogóle możliwe?

Oczywiście istnieją w Europie instrumenty (np. organy), strojone wg zasad dawnych strojów i przy ich użyciu możemy wysłuchać utworów instrumentalnych w kształcie brzmieniowym w jakim zostały stworzone. Ale czy można wysłuchać np. utworów wokalnych tamtych epok w swych brzmieniach? Wszak dla współczesnych wykonawców, przyzwyczajonych do stroju równomiernie temperowanego, intonacja w np. stroju średniotonowym jest nie lada wyczynem.

W tym miejscu z pomocą może nam przyjść SCALA. Program, którego zadaniem jest konwersja muzyki zapisanej w formacie midi, z jednego systemu brzmieniowego do innego. Oczywiście dla nas istotna będzie konwersja ze stroju równomiernie temperowanego do np.

średniotonowego, czy pitagorejskiego... Program ten daje możliwość budowania docelowego systemu brzmieniowego za pomocą interwałów wyrażonych po przez proporcje, bądź po przez wartości ustalone w centach. I tak oto zbudowany system brzmieniowy staje się podstawą do przeprowadzenia konwersji.

Scala ponad to jest bogatym narzędziem służącym do przeprowadzania analizy wybranych systemów brzmieniowych, czy to za pomocą diagramów kołowych (np. koła kwintowe), czy też za pomocą wymyślonej klawiatury instrumentu klawiszowego.

Program ten, w pełni bezpłatny, można pobrać ze strony: <http://www.huygens-fokker.org/scala/>. Tam też znajduje się dokumentacja programu w języku angielskim.

Bibliografia

Drobner Mieczysław: Instrumentoznastwo i akustyka. Państwowe Wydawnictwo Muzyczne, Kraków 1986.

Harnoncourt Nikolaus: Muzyka mową dźwięków. Ruch muzyczny, Warszawa 1982.

Harnoncourt Nikolaus: Dialog muzyczny. Ruch muzyczny, Warszawa 1999.

Kunzmann Peter: Atlas filozofii. Prószyński i S-ka, Warszawa 2003.

Landels G. John: Muzyka starożytnej Grecji i Rzymu. Homini, Kraków 2005.

Michels Ulrich: Atlas muzyki, t. 1 i 2. Prószyński i S-ka, Warszawa 2003.

ponadto:

Maculewicz Piotr: Właściwości brzmieniowe dawnych systemów stroju muzycznego. Prace Zakładu Powszechnej Historii Muzyki. Zeszyt 4. Instytut Muzykologii Uniwersytetu Warszawskiego, 1994.

Szlagowska Danuta: Muzyka baroku. Akademia Muzyczna w Gdańsku, Gdańsk 1998.